Ecole Normale Supérieure, DMA

Examen d'Analyse complexe du 29 mai 2017 : brève correction

Problème (la preuve de Koebe du théorème de représentation conforme)

(1) (a) Pour tout réel u,

$$(R-r)^2 = R^2 - 2rR + r^2 \leq R^2 - 2rR\cos(u) + r^2 \leq R^2 + 2rR + r^2 = (R+r)^2.$$

Comme h est à valeurs positives, on en déduit avec la formule de Poisson que

$$\frac{R-r}{2\pi(R+r)}\int_0^{2\pi} h(a+Re^{it})dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)h(a+Re^{it})}{R^2-2rR\cos(\theta-t)+r^2}dt \leq \frac{R+r}{2\pi(R-r)}\int_0^{2\pi} h(a+Re^{it})dt,$$

et les termes de gauche et de droite de cette inégalité sont égaux respectivement à $\frac{R-r}{R+r}h(a)$ et $\frac{R+r}{R-r}h(a)$, toujours par la formule de Poisson (qui redonne la formule de la moyenne en prenant $r=0$ dans son énoncé).

(b) Quitte à remplacer h_n par $h_n - h_0$ pour tout n, on peut supposer les h_n à valeurs positives. Montrons tout d'abord à l'aide de la question précédente que l'ensemble V des $z \in U$ tels que la suite $(h_n(z))_n$ converge est ouvert et fermé dans U. Comme U est connexe, cela prouvera que V est soit égal à U tout entier, soit vide (auquel cas, $h_n(z) \to +\infty$ pour tout $z \in U$, par croissance). Soit $a \in U$ et $R > 0$ tel que $\bar{D}(a,R) \subset U$. L'inégalité de droite de la question précédente donne que pour tout n, pour tout $\theta \in [0,2\pi]$ et tout $r \leq R/2$:

$$h_n(a+re^{i\theta}) \leq 3h_n(a).$$

Pour un tel r et un tel θ, la suite $(h_n(a+re^{i\theta}))_n$ est donc majorée et croissante, donc convergente ; par conséquent, $\bar{D}(a,R/2) \subset V$, ce qui prouve que V est ouvert. Un raisonnement analogue utilisant l'autre inégalité de la question précédente montre que $U\backslash V$ est aussi ouvert, et donc V est fermé.

Pour terminer, il ne reste plus qu'à étudier le cas où $V = U$ (dans l'autre cas, il n'y a rien de plus à dire). Notons h la fonction sur U définie par :

$$\forall z \in U,\ h(z) = \lim_n h_n(z).$$

On peut alors procéder de deux façons. Une première possibilité est de constater que le théorème de convergence monotone implique que h vérifie encore la propriété de la moyenne, donc est harmonique. En particulier, h est continue et on peut donc déduire du théorème de Dini que la convergence de la suite *croissante* de fonctions $(h_n)_n$ vers la fonction *continue* h est uniforme sur tout compact. Une autre possibilité est de commencer par montrer la convergence uniforme sur tout compact : pour ce faire, si K est un compact de U, on recouvre K par un nombre fini de disques inclus dans U et on applique les inégalités de la question (1)(a) aux fonctions $h_m - h_n$, $m \geq n$, pour déduire de la convergence simple aux centres de ces disques que la suite $(h_n)_n$ est uniformément de Cauchy sur K. On peut ensuite passer à la limite dans la formule de la moyenne pour les h_n pour conclure que h est harmonique.

(c) Notons V le sous-ensemble de U formé des z tels que la suite $(f_n(z))_n$ converge. L'ensemble V est ouvert : en effet, soit $b \in U$ et $R > 0$ tel que $D(b,R) \subset U$. L'inégalité de Borel-Carathéodory donne que pour tout $r < R$, pour tout n et tout $m \geq n$,

$$\sup_{|z-b|\leq r}|f_m(z)-f_n(z)| = \sup_{|z-b|=r}|f_m(z)-f_n(z)| \leq \frac{2r}{R-r}\sup_{|z-b|=r}\mathrm{Re}(f_m(z)-f_n(z)) + \frac{R+r}{R-r}|f_m(b)-f_n(b)|$$

(la première égalité est le principe du maximum). Or la suite de fonctions $(\mathrm{Re}(f_n))_n$ est une suite croissante (d'après l'hypothèse (1)) de fonctions harmoniques sur U. D'après la question précédentes, elle diverge partout vers l'infini ou converge (uniformément sur les compacts) partout. Le premier cas est exclu puisque par hypothèse la suite $(\mathrm{Re}(f_n(a)))_n$ converge. Par conséquent, l'inégalité montre que la suite $(f_n(z))$ est de Cauchy, donc convergente, pour tout $z \in D(b,R)$, i.e. $D(b,R) \subset V$. L'ensemble V est aussi fermé : en effet, soit $b \in \bar{V}$, et $R > 0$ tel que $D(b,R) \subset U$. Soit $b' \in V$ tel que $|b-b'| < R/2$. Comme $D(b',R/2) \subset D(b,R) \subset U$, l'argument que l'on vient de donner pour justifier que V est ouvert montre que $D(b',R/2)$ est inclus dans V. Or $b \in D(b',R/2)$, donc $b \in V$. V est donc à la fois ouvert et fermé dans U connexe et non vide, puisque $a \in U$ par hypothèse : par conséquent, $V = U$.

L'argument utilisé pour justifier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ donne en fait un résultat plus fort : en effet, l'inégalité ci-dessus et la convergence uniforme sur les compacts de la suite $(\mathrm{Re}(f_n))_n$ (question $1(b)$) garantissent que la suite (f_n) est uniformément de Cauchy sur tout disque inclus dans U. On en déduit immédiatement que la suite (f_n) converge uniformément sur les compacts de U et l'holomorphie de la limite.

(d) Comme U est simplement connexe et que les f_n ne s'annulent pas, on peut choisir $g_n \in H(U)$ pour tout n, telle que $\exp(g_n) = f_n$. Alors $\mathrm{Re}(g_n) = \log(|f_n|)$ et on peut supposer la suite $(g_n(a))$ convergente (quitte à soustraire à g_n un multiple entier de $2i\pi$). On peut donc appliquer à la suite $(g_n)_n$ la conclusion de la question $1(c)$: la suite $(g_n)_n$ converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction holomorphe g et donc la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur les compacts de U (exp est continue, donc uniformément continue sur les compacts) vers $f = \exp(g)$.

2 (a) Voir le cours ou le TD.

(b) On note $r_n = d(0, \mathbb{C}\backslash U_{n-1}) = d(0, \bar{D}\backslash U_{n-1})$. On a $r_n > 0$, puisque $0 \in U_{n-1}$, qui est ouvert. Comme $\bar{D}\backslash U_{n-1}$ est compact, cette distance est atteinte en $a_n \in \bar{D}\backslash U_{n-1}$, qui est donc de module r_n. Comme $D(0,r_n) \subset U_{n-1}$, a_n est adhérent à U_{n-1}, i.e. $a_n \in \partial U_{n-1}$.

L'énoncé de l'exercice aurait ensuite dû préciser[1] que U_{n-1} était simplement connexe (ce sera une conséquence directe de sa définition, mais celle-ci n'a pas encore été donnée...). Comme $a_n \notin U_{n-1}$, l'ouvert $\varphi_{a_n}(U_{n-1})$ est simplement connexe (car U_{n-1} l'est et car φ_{a_n} est un biholomorphisme sur D) et ne contient pas 0. On peut donc y définir une fonction racine carrée t, envoyant $-a_n$ sur b_n. La fonction $G_n = \varphi_{b_n} \circ t \circ \varphi_{a_n}$ est la fonction cherchée (elle envoie 0 sur 0 par choix de t).

(c) Comme G_n est injective sur U_{n-1}, $G_n'(0) \neq 0$ d'après le cours, donc g_n est bien définie. En fait on calcule facilement $G_n'(0) = F_n'(0)^{-1}$ avec la définition de F_n et on obtient $g_n'(0) = |G_n'(0)| = \frac{1+r_n}{2\sqrt{r_n}}$.

(d) Le fait que ψ_n soit une bijection holomorphe de U sur U_n est une récurrence facile à partir du cas $n = 0$ en utilisant que g_n réalise un biholomorphisme entre U_{n-1} et U_n pour tout n. Comme $D(0,r_1) \subset U$, on peut considérer $\tilde{\psi}_n : D \to D$, $z \mapsto \psi_n(r_1 z)$, pour chaque n, et lui appliquer le lemme de Schwarz (on a $\tilde{\psi}_n(0) = 0$) : on a $|\tilde{\psi}_n'(0)| \leq 1$, i.e. $|\psi_n'(0)| \leq r_1^{-1}$. La suite $(\psi_n'(0))_n$ est donc bornée et comme par récurrence :

$$\forall n \geq 1,\ \psi_n'(0) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1+r_k}{2\sqrt{r_k}},$$

cette suite est croissante (puisque pour tout n, $(1+r_n)/(2\sqrt{r_n}) \geq 1$). Par conséquent, elle converge et donc

$$\frac{1+r_n}{2\sqrt{r_n}} \to_{n \to +\infty} 1,$$

ce qui entraîne que $r_n \to 1$.

[1] Il en a été évidemment tenu compte dans la correction.

(e) Comme ψ_n est nulle en 0, on peut définir $f_n \in H(U)$ comme dans l'énoncé. On a $f_n(0) = \psi_n'(0)$ et d'après $2(d)$, cette suite converge. Montrons que pour tout $z \in U$,

$$0 < |f_n(z)| \leq |f_{n+1}(z)|.$$

La première égalité découle de que ψ_n est injective et nulle en 0. Pour la seconde, on distingue les cas $z = 0$ et $z \neq 0$. Dans la premier cas, cela a été vu en $2(d)$; dans le second, cela revient à prouver que $|\psi_n(z)| \leq |\psi_{n+1}(z)|$, et comme $\psi_{n+1} = g_{n+1} \circ \psi_n$, il suffit de montrer que pour tout $z \in U_n$,

$$|z| \leq |g_{n+1}(z)| = |G_{n+1}(z)|,$$

c'est-à-dire que pour tout $z \in \Omega_n$,

$$|F_{n+1}(z)| \leq |z|.$$

Or F_{n+1} est une fonction de D dans D, nulle en 0, donc l'inégalité cherchée est exactement le lemme de Schwarz pour $z \in \Omega_n \subset D$. On peut désormais appliquer la résultat de la question $1(d)$ à la suite $(f_n)_n$: celle-ci converge uniformément sur les compacts de U vers $f \in H(U)$, et donc la suite $(\psi_n)_n$ converge uniformément vers $\psi \in H(U)$ définie par

$$\forall z \in U, \ \psi(z) = zf(z).$$

Comme $\psi(0) = 0$ et $|\psi(z)| \geq |\psi_0(z)| > 0$ si $z \neq 0$, ψ n'est pas constante. On en déduit comme dans le cours (corollaire du théorème d'Hurwitz), chacune des ψ_n étant injective, que ψ est elle-même injective. Montrons que l'image de ψ est D tout entier. Soit $r < 1$, et m tel que $r_m > r$ (m existe, puisque l'on a vu que $r_n \to 1$). On a en particulier $\bar{D}(0,r) \subset \psi_m(U)$. Montrons que si z est au bord de l'ouvert $\psi(\psi_m^{-1}(D(0,r)))$, alors $|z| \geq r$. Cela montrera que $D(0,r) \subset \psi(\psi_m^{-1}(D(0,r)))$. Soit $(w_k)_k$ une suite de points de $D(0,r)$ telle que $z = \lim_k \psi(\psi_m^{-1}(w_k))$ et convergeant vers w dans $\bar{D}(0,r)$. Notons que $w \notin D(0,r)$, car sinon $z = \psi(\psi_m^{-1}(w))$ n'est pas au bord de $\psi(\psi_m^{-1}(D(0,r)))$. On a donc $|w| = r$. Or,

$$|\psi(\psi_m^{-1}(w))| \geq |\psi_m(\psi_m^{-1}(w))| = |w| = r,$$

puisque la suite $(\psi_n)_n$ est croissante. D'où le résultat cherché. Ainsi,

$$D(0,r) \subset \psi(\psi_m^{-1}(D(0,r))) \subset \psi(U).$$

Ceci valant pour tout $r < 1$, on voit que $D \subset \psi(U)$. Comme on a aussi $\psi(U) \subset D$ (encore par Hurwitz), on obtient en définitive que ψ réalise un biholomorphisme entre U et D.

Remarque. Cette démonstration évite le recours aux familles normales et permet de fabriquer une suite de fonctions holomorphes convergeant vers la transformation conforme dont le théorème de Riemann assure l'existence, sans avoir besoin d'extraire une sous-suite. Elle ne semble toutefois pas facile à implémenter en pratique...

Exercice bonus

Soit f une fonction entière injective. Comme une fonction holomorphe non constante est ouverte, il existe $r > 0$ tel que $D(f(0), r) \subset f(D(0,1))$. Posons alors

$$g(z) = \frac{z}{f(z) - f(0)}$$

si $z \neq 0$ et $g(0) = f'(0)^{-1}$ (ce qui a un sens, puisque comme f est injective, $f'(0) \neq 0$). La fonction g ainsi définie est entière, puisque sa singularité en 0 est éliminable. Comme f est injective, $f(\mathbb{C} \backslash D(0,1)) \cap f(D(0,1)) = \emptyset$. Par conséquent, $|f(z) - f(0)| \geq r$ si $|z| \geq 1$. On en déduit que $|g(z)| = \mathcal{O}(|z|)$ quand $|z| \to +\infty$ et la version polynomiale du théorème de Liouville vue en cours et en TD montre que g est forcément un polynôme de degré 1. Donc f est une homographie ; étant entière et injective, c'est une transformation affine.